SZEPESSY BÁLINT

MEGJEGYZÉSEK A VALÓS FÜGGVÉNYEK ITERÁLÁSÁHOZ IV.

(A negyedrendű ciklusokról)

Abstract: **(Remarks on iteration of real functions IV.)** A real valued function $f(x)$, defined on the closed interval $[a,b]$, is called iterational basic function if

(i) $f(x)$ is a continuous function at every inside points of the interval $[a,b]$; furthermore $f(x)$ is continuous on the right and on the left at point a and b respectively;

(ii) $f(x)$ maps the interval $[a,b]$ onto itself;

(iii) there is no subinterval of the interval $[a,b]$ where $f(x)$ is a constant function;

For $i=0,1,2,\dots$ the function $f_i(x)$, defined by $f_0(x)=x$ and $f_i(x)=f\left(f_{i-1}(x)\right)$ for $i>0$; is called i^{th} iterated function of $f(x)$. We say a real number c is a fix point of $f(x)$ of order one if $f(c)=c$, furthermore c is a fix point of order r if $f_r(c)=c$ but $f_n(c)\neq c$ for $n=1,2,\dots,r-1$. If c is a fix point of $f(x)$ of order r, then the numbers $f\left(c\right)=c_1$, $f\left(c_1\right)=c_2,\dots,f\left(c_{r-1}\right)=c$ are also fix points of order r and the fix points $c_1,c_2,\dots,c$ give a cycle of order r.

In some earlier papers we gave conditions for $f(x)$ if it has no fix point

of order greater than two, furthermore we have studied iterational basic functions for which the orders of the cycles are unbounded (see SZEPESSY, 1979, 1982, 1984).

In this paper we investigate iterational basic functions for which we have cycles of order at most four.

1. Bevezetés

Legyen f(x) az $[a,b], (a<b)$ zárt intervallumban értelmezett olyan egyértékű valós függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

1. f(x) az adott szakasz minden belső pontjában folytonos; a kezdő és a végpontban jobbról, illetve balról folytonos.
2. f(x) az $[a,b]$ intervallumot önmagára képezi le;
3. nincs olyan részintervalluma az adott szakasznak, amelyben f(x)=constans teljesül.

Az f(x) függvényt iterációs alapfüggvénynek nevezzük az adott intervallumon. Az

$$f_0(x)=x,\ f_1(x)=f(x),\ f_2(x)=f(f(x)),\dots,f_n(x)=f\left[f_{n-1}(x)\right],\dots$$

függvényeket az f(x) függvény nulladik, első, második, ..., n-edik (n-edrendű), ... iterált függvényeinek (iteráltjainak) nevezzük. Az $f_n(x)$

(n=2,3,....) függvények is mind rendelkeznek az 1., 2., 3. tulajdonságokkal. (Ezt a közvetett függvény folytonosságára vonatkozó tételekből teljes indukcióval könnyen bizonyíthatjuk.) Teljesülnek az

$$f_{n+m}(x)=f_n\left[f_m(x)\right]=f_m\left[f_n(x)\right]$$

azonosságok.

Ha $[c,d]$, $(c<d)$ az $[a,b]$ szakasz egy részszakasza, akkor pontjainak első iteráltjai is egy szakaszt alkotnak; jele: $[c,d]_1$.(Nyilvánvaló ugyanis, hogy

$[c,d]_1=[\min f(x), \max f(x)]$, ha $c\leq x\leq d$.) A $[c,d]$ szakasz n-edik iteráltján a $[c,d]_n=\left([c,d]_{n-1}\right)_1$ intervallumot értjük.

Ha f(c)=c, akkor a c pontot az f(x) függvény elsőrendű fixpontjának nevezzük. Ha $f_n(c)\neq c$, n=1,2,..., r-1 esetén, de $f_r(c)=c$, akkor a c pont az f(x) függvény r-edrendű fixpontja. Ekkor mint ismeretes

$$f\left[c\right]=c_1,\ f\left[c_1\right]=c_2,\dots,f\left[c_{r-1}\right]=c$$

pontok is páronként különböző r-edrendű fixpontok, s egy r-edrendű ciklust alkotnak. Az első iterációelméleti rendszerező dolgozatok BARNA BÉLA (1960, 1966 majd 1973, 1975) professzortól jelentek meg. Azóta -- dolgozatai kapcsán is -- megnövekedett azoknak a száma, akik iterációelméleti kutatásokat folytatnak, s egyre több eddig még nyitott kérdést tisztáznak.

Előbbi dolgozatokban (SZEPESSY, 1979, 1984) azt a kérdést vizsgáltuk, hogy milyen iterációs alapfüggvény esetén nem lehet a fixpontok, (ciklusok) rendszámára felső korlátot adni. Bebizonyítottuk a következőt:

Ha az $[a,b]$ szakaszban f(x) az 1., 2., 3. feltételeknek eleget tesz, és van két olyan diszjunkt részszakasz, amelyeket a függvény az egész $[a,b]$ szakaszra képez le, akkor van bármilyen magasrendű ciklus (SZEPESSY, 1979.)

Ennek a tételnek a feltételei csak elégségesek tetszőleges magasrendű ciklus létezéséhez. Sikerült ugyanis bebizonyítani;

Ha $a \leq c < d < b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre f(c)=c, f(d)=b, továbbá van a $[d,b]$ szakasznak olyan részszakasza, amelyet f(x) az $[a,b]$ szakaszra képez le, akkor bármely (természetes) n szám esetén van az f(x) függvénynek n-edrendű fixpontja (SZEPESSY, 1984).

Ezen tétel feltételeinek az elégséges volta miatt kezdtük vizsgálni, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén lehet a ciklusok rendszámára felső korlátot adni (SZEPESSY, 1982). Az említett dolgozatban az alapfüggvényre olyan további feltételeket adtunk meg, amelyek mellett csupán első vagy másodrendű fixpontok lehetnek. Bebizonyítottuk egyebek mellett, hogy:

Ha $a < d < b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre f(a)=a, f(d)=b, $f(b) \geq d$ és $x \in [a,d]$ esetén $x < f(x) < b$, valamint f(x) a $[d,b]$ szakaszban monoton csökkenő, akkor az $[a,b]$ szakaszban csak első és másodrendű fixpontok lehetnek (3. tétel).

Ehhez a tételhez analóg a következő állítás:

Ha $a < d < b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre f(b)=b, f(d)=a, $f(a) \leq d$ relációk teljesülnek és

$x \in [d,b]$ esetén $x > f(x) > a$, továbbá $f(x)$ az $[a,d]$ szakaszban monoton csökkenő, akkor az $[a,b]$ szakaszban csak első és másodrendű fixpontok lehetnek (4. tétel).

Ebben a dolgozatban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén lehetnek legfeljebb negyedrendű fixpontok.

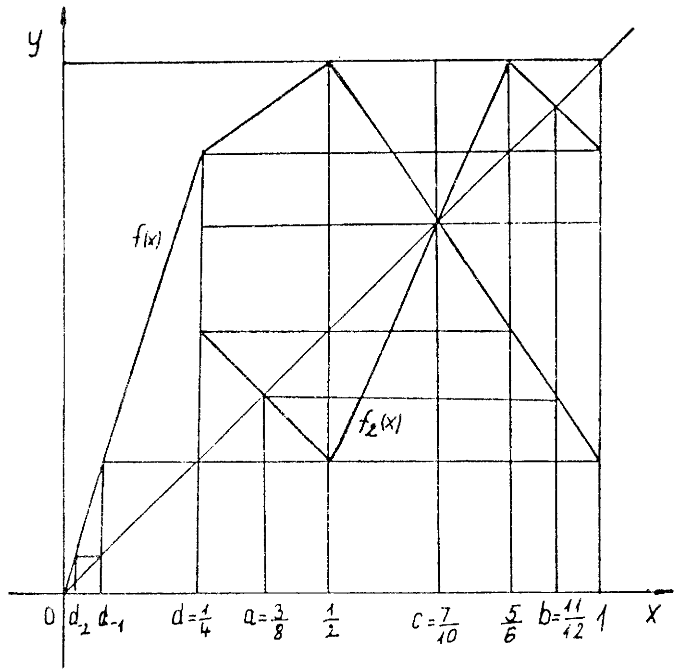
2. A negyedrendű ciklusokról

Legyen a $[0,1]$ szakaszban értelmezett iterációs alapfüggvény az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{3}x & \text{ha} \quad 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3}(x+1) & \text{ha} \quad \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4} & \text{ha} \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} \quad . \qquad \text{(l. 1. ábra)}$$

A 0 és a $c = \frac{7}{10}$ pontok elsőrendű fixpontok.

A $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ szakasz bármely x_0 pontjából kiinduló iterációs pontsorozatnak csak véges számú pontja van e szakaszban, annak megfelelően, hogy a kezdőpont (az 1. ábra szerinti jelölésben) a $\left[d_{-(i+1)}, d_{-i}\right]$ $(i=0,1,2,\dots)$ szakaszok melyikében van. Ezek a szakaszok ugyanis egyszeresen és teljesen lefedik a szakaszt; $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ van tehát olyan x_j $(j > i)$ iterált pont, amelyik az $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ szakaszba esik.



1. ábra

Ezt a szakaszt f(x) önmagára képezi le, tehát x_j minden iterált pontja benne marad a szakaszban. Magasabbrendő fixpontok csak ebben a szakaszban lehetnek.

Az 1. ábrán megrajzoltuk az

$$f_2(x) = \begin{cases} -x+\frac{3}{4} & \text{ha} \quad \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{9}{4}x-\frac{7}{8} & \text{ha} \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{6} \\ -x+\frac{11}{6} & \text{ha} \quad \frac{5}{6} \le x \le 1 \end{cases}$$

iterált függvény képét is az $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ szakaszban. Az $a = \frac{3}{8}$ és a $b = \frac{11}{12}$ pontok másodrendű fixpontok. Tekintsük az $\left[\frac{1}{4}, c\right]$ illetve a $[c,1]$ szakaszban $f_2(x)$-et iterációs alapfüggvénynek. Mivel $f_2(x)$ ezeket a szakaszokat önmagára képezi le és ezekben $f(x) > c$ illetve $f(x) < c(x \neq c)$, ezért 1.-nél magasabbrendű páratlan rendszámú fixpontok az említett szakaszokban, s így az $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ szakaszban nem léphetnek fel.

A bevezetésben is említett (SZEPESSY, 1982) 4., illetve 3. tétel feltételei teljesülnek $f_2(x)$-re az $\left[\frac{1}{4}, c\right]$ illetve a $[c,1]$ szakaszban, s ezek szerint $f_2(x)$-nek ezekben a szakaszokban legfeljebb másodrendű fixpontjai lehetnek. Az $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ és az $\left[\frac{5}{6}, 1\right]$ szakasz pontjai az $a = \frac{3}{8}$ és a $b = \frac{11}{12}$ pontok kivételével $f_2(x)$-nek másodrendű, ezért f(x)-nek negyedrendű fixpontjai.

Tehát f(x) iterációs alapfüggvénynek a $[0,1]$ szakaszban csak első, másod és negyedrendű fixpontjai vannak.

Ez a példa arra mutat, hogy általánosabb esetekben is hasonló lehet a helyzet. Valóban igaz a következő.

1. Tétel: Ha $a < d < b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre f(a)=a, f(d)=b, $f(b)=b_1<d$, $f\left(b_1\right) = b_2 \geq d_{-1} \left(d<d_{-1}<b\right)$ relációk teljesülnek és $a < x < d$ esetén $x < f(x) < b$, valamint f(x) a $\left[b_1, d\right]$ szakaszban monoton növekedő, a $[d,b]$-ben pedig monoton csökkenő akkor az $[a,b]$ szakaszban legfeljebb negyedrendű fixpontok lehetnek. (2. ábra)

Bizonyítás: Mivel $b_1<x<b$ esetén $f(x)>b_1$, ezért az $\left[a,b_1\right]$

szakasz bármely x_0 pontjából kiinduló iterációs pontsorozatnak csak véges számú pontja marad ebben a szakaszban s ez legfeljebb i, ha a kezdőpont a $\left[d_{-(i+1)}, d_{-i}\right]$ szakaszba esik $\left(d_{-(i+1)} = \sup\limits_{a<x<d_{-1}} x,\right.$ $f(x)=d_{-i}$; tehát $d_{-(i+1)}$ az $\left[a, d_{-i}\right]$ szakaszban a legnagyobb abszcisszaérték, amelyben $f(x)$ d_{-i} értékű (i=0,1,2,3....)).

A $\left[d_{-(i+1)}, d_{-i}\right]$ (i=0,1,2,....) szakaszok egyszeresen és teljesen lefedik az $\left[a, b_1\right]$ szakaszt; van tehát oly x_j $(j>i)$ iterált pont, amelyik a $\left[b_1, b\right]$ szakaszba esik.

(A lefedés teljessége abból következik, hogy a d_{-i} (i=0,1,2,....) monoton csökkenő alulról korlátos. $\left(d_{-i} > a\right)$ sorozat, tehát van határértéke.

Legyen $\lim\limits_{i\to\infty} d_{-i} = \alpha$, akkor a $f\left(d_{-(i+1)}\right)=d_{-i}$ egyenlőtlenségekből az $f(x)$ folytonossága által

$$\lim_{i\to\infty} f\left(d_{-(i+1)}\right)=f\left(\lim_{i\to\infty} d_{-(i+1)}\right)=f\left(\lim_{i\to\infty} d_{-i}\right)=f(\alpha)=\lim_{i\to\infty} d_{-i}= \alpha$$

következik azaz α elsőrendü fixpont, s ez csak az $\underline{a}$ pont lehet.

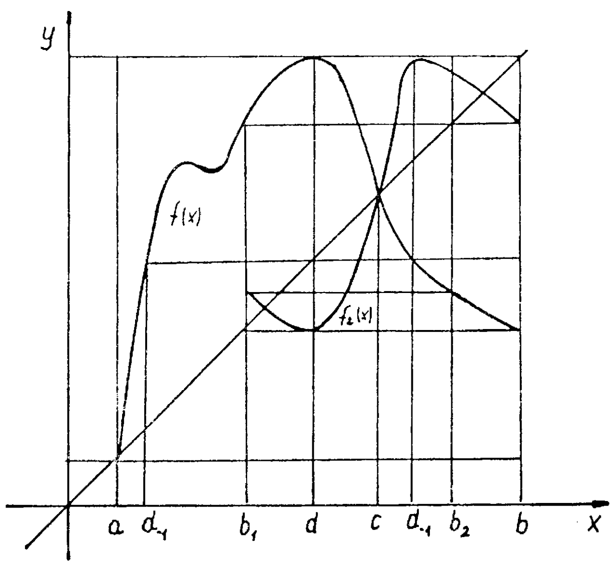
Magasabbrendű fixpontok tehát csak a $\left[b_1, b\right]$ szakaszban lehetnek. Tekintsük $f_2(x)$-et iterációs alapfüggvénynek ebben a szakaszban. Monoton növekvő (csökkenő) függvény monoton csökkenő (növekvő) függvénye (iterálja) monoton csökkenő, valamint monoton csökkenő függvény monoton csökkenő függvénye monoton növekvő, ezért $f_2(x)$ a $\left[b_1, d\right]$ szakaszban monoton csökkenő és $f_2(d)=b_1<d$ miatt egy pontban metszi az átlót, a $\left[d, d_{-1}\right]$

szakaszban monoton növekedő és $f_2(d_{-1}) = b$, így ebben a szakaszban is lehetnek másodrendű fixpontok; a $[d_{-1}, b]$ szakaszban monoton csökkenő tehát itt is lesz egy másodrendű fixpont (2. ábra).

a/ Ha a $[d, d_{-1}]$ intervallumban vannak másodrendű fixpontok, akkor legyen $e = \sup_{d<x<d_{-1}} x, \; f_2(x) = x$ és iteráltja e_1.

Az $[e_1, e]$ szakaszt a benne monoton növekvő $f_2(x)$ függvény önmagára képezi le, így itt (SZEPESSY, 1982) 1. tétel értelmében $f_2(x)$-nek csak első, azaz f(x)-nek másodrendű fixpontjai lehetnek.

Az $[e, b]$ illetve a $[b_1, e_1]$ intervallumban (SZEPESSY, 1982) harmadik illetve negyedik tétele értelmében $f_2(x)$-nek legfeljebb másodrendű fixpontjai lehetnek; azaz f(x)-re vonatkozóan az említett szakaszokban legfeljebb negyedrendű fixpontok léphetnek fel.



2. ábra

b/ Ha a $[d, d_{-1}]$ szakaszban nincsenek másodrendű fixpontok (2. ábra) akkor a $[b_1, c]$ illetve a $[c, b]$ szakaszban (c elsőrendű fixpont) ugyancsak a (SZEPESSY, 1982) harmadik és negyedik tétel értelmében (azok feltételei teljesülnek $f_2(x)$-re); f(x)-nek legfeljebb negyedrendű fixpontjai lehetnek.

Mind az a. mind a b. esetben $f_2(x)$ az $[b_1, c]$ illetve $[c, b]$ szakaszokat önmagára képezi le és ezekben a szakaszokban $f(x) > c$ illetve $f(x) < c$ $(x \neq c)$, ezért elsőnél magasabbrendű páratlan rendszámú fixpontok a $[b_1, b]$ szakaszban nem fordulnak elő. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

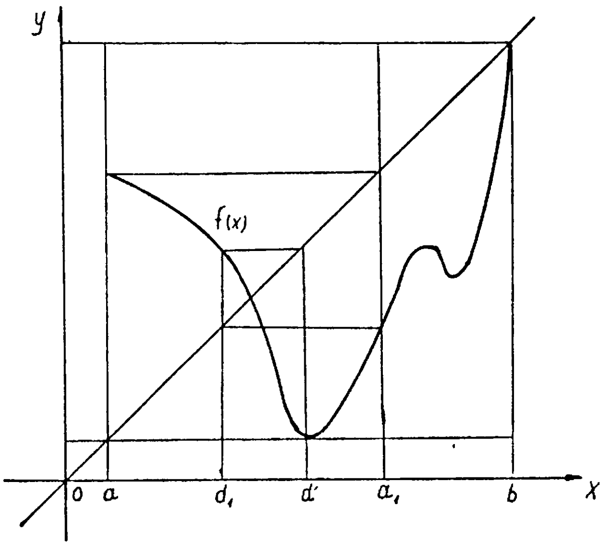
E tételéhz hasonló bizonyítással megmutatható, hogy igaz a tételhez analóg.

2. Tétel: Legyen $a < d < b$ és $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszban értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre f(d)=a, f(b)=b,

$$f(a) > d, \quad f_2(a) \leq d_{-1} \quad (a < d_{-1} < d) \quad \text{és} \quad d < x < b \quad \text{esetén}$$

$$a < f(x) < x, \quad \text{valamint} \quad f(x) \text{ az } [a, d]$$

szakaszban monoton csökkenő a $[d, a_1]$ szakaszban monoton növekvő. Ekkor az $[a, b]$ szakaszban legfeljebb negyedrendű fixpontok lehetnek (3. ábra).



3. ábra

Az eddigiek alapján könnyen konstruálhatók olyan iterációs alapfüggvények, amelyekre a fixpontok rendszáma felülről nem korlátos, valamint olyanok, amelyekre legfeljebb negyedrendű fixpontok (ciklusok) léteznek.

További vizsgálódás tárgyát képezi, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén lehetnek negyedrendűnél magasabb rendű, de felülről korlátos ciklusok.

FELHASZNÁLT IRODALOM

B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen I. Publ. Math. (Debrecen) 7 (1960), 16-40.

B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen II. Publ. Math. (Debrecen) 13 (1966), 169-172.

B. Barna, Berichtigung zur Arbeit "Über die Iteration reeller Funktionen II." Publ. Math. (Debrecen) 20 (1973), 281-282.

B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen III. Publ. Math. (Debrecen) 22 (1975), 269-278.

L. Berg, (Rostock) Über irreguläre Iterations - folgen. Publ. Math. (Debrecen) 17 (1970), 112-115.

A. Ralston, A first course in numerical analysis (Mc Grax - Mill Inc.), New York, 1965.

A. Björek - G. Dahlgist, Numerische Methoden (Oldenburg Verl.) München - Wien, 1972.

J. Stoer, Einfürhrung in die numerische Mathematik I. (Springer) Berlin - Heidelberg - New York, 1972.

Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához I.
Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XV.
(Eger, 1979.) 395-405.

Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához II.
Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XVI.
(Eger, 1982.) 557-566.

Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához III.
(A tetszőleges magasrendű ciklusokról)
Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XVII.
(Eger, 1984.) 835-843.